**1. Роль и место задач в начальном курсе математики. Функции текстовых задач**

Кроме различных понятий, предложений, доказательств в любом математическом курсе есть задачи. В обучении математике младших школьников преобладают такие, которые называют арифметическими, текстовыми, сюжетными. Эти задачи сформулированы на естественном языке (поэтому их называют ***текстовыми*)**; в них обычно описывается количественная сторона каких-то явлений, событий (поэтому их называют арифметическими или сюжетными); они представляют собой задачи на разыскивание искомого и сводятся к вычислению неизвестного значения некоторой величины (поэтому их иногда называют вычислительными).

Решению текстовых задач при начальном обучении уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и главное – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления детей.

Существуют различные методические подходы к обучению младших школьников решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения ни брал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать различными методами и способами.

**2. Структура процесса решения текстовой задачи**

Как было сказано выше, любая текстовая задача представляет собой описание какого-либо явления (ситуации, процесса). С этой точки зрения текстовая задача есть словесная модель явления (ситуации, процесса). И, как во всякой модели, в текстовой задаче описывается не все явление в целом, а лишь некоторые его стороны, главным образом, его количественные характеристики. Рассмотрим, например, такую задачу: «Автомобиль выехал из пункта А со скоростью 60 км/ч. Через 2ч вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от А второй автомобиль догонит первый?».

В задаче описывается движение двух автомобилей. Как известно, любое движение характеризуется тремя величинами: пройденным расстоянием, скоростью и временем движения. В данной задаче известны скорости первого и второго автомобилей (60 км/ч и 90 км/ч), известно, что они прошли одно и то же расстояние от пункта А до места встречи, количественную характеристику которого и надо найти. Кроме того, известно, что первый автомобиль был в пути на 2 ч больше, чем второй.

Обобщая, можно сказать, что ***текстовая задача есть описание на естественном языке некоторого явления (ситуации, процесса) с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этого явления, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между компонентами или определить вид этого отношения.***

Рассмотрим еще одну задачу из начального курса математики: «Свитер, шапку и шарф связали из 1 кг 200 г шерсти. На шарф потребовалось на 100 г шерсти больше, чем на шапку, и на 400 г меньше, чем на свитер. Сколько шерсти израсходовали на каждую вещь?»

В задаче речь идет о расходовании шерсти на свитер, шапку и шарф. Относительно этих объектов имеются определенные ***утверждения*** и ***требования.***

Утверждения:

1. Свитер, шапка и шарф связаны из 1200 г шерсти.
2. На шарф израсходовали на 100 г больше, чем на шапку.
3. На шарф израсходовали на 400 г меньше, чем на свитер.

Требования:

1. Сколько шерсти израсходовали на свитер?
2. Сколько шерсти израсходовали на шапку?
3. Сколько шерсти израсходовали на шарф?

Утверждения в задаче называют***условиями*** (или условием, как в начальной школе). В задаче обычно не одно условие, а несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и в утвердительной форме. Условия и требования взаимосвязаны.

Систему взаимосвязанных условий и требований называют ***высказывательной моделью задачи.***

Таким образом, чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру. Иными словами, надо построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (сделать это можно письменно или устно), так как текст задачи, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно перефразировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т.д.

Кроме того, вычленение условий задачи можно производить с разной глубиной. Глубина анализа условий и требований задачи зависит главным образом от того, знакомы ли мы с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знаем ли мы способ решения таких задач.

*Пример 1*

Сформулируйте условия и требования задачи: Две девочки одновременно побежали навстречу друг другу по спортивной дорожке, длина которой 420 м. Когда они встретились, первая пробежала на 60 м больше, чем вторая. С какой скоростью бежала каждая девочка, если они встретились через 30 с?

В задаче речь идет о движении двух девочек навстречу друг другу. Как известно, движение характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем.

Условия задачи:

1. Две девочки бегут навстречу друг другу.
2. Движение они начали одновременно.
3. Расстояние, которое они пробежали, - 420 м.
4. Одна девочка пробежала на 60 м больше, чем другая.
5. Девочки встретились через 30 с.
6. Скорость движения одной девочки больше скорости движения другой.

Требования задачи:

1. С какой скоростью бежала 1-я девочка?
2. С какой скоростью бежала 2-я девочка?

По отношению между условиями и требованиями различают:

а) ***определенные задачи -*** в них заданных условий столько, сколько необходимо и достаточно для выполнения требований;

б) ***недоопределенные задачи*** – в них условий недостаточно для получения ответа;

в) ***переопределенные задачи*** – в них имеются лишние условия.

В начальной школе ***недоопределенные задачи считают задачи с недостающими данными, переопределенные – задачами с избыточными данными.***

*Например*, задача «Возле дома росло 5 яблонь, 2 вишни и 3 березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?» является переопределенной, так как содержит лишнее условие.

Задача: «Из зала вынесли сначала 12 стульев, потом еще 5. Сколько стульев осталось в зале?» является недоопределенной – в ней условий недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Уточним теперь смысл термина «решение задачи». Так сложилось, что этим термином обозначают разные понятия:

1. ***решением задачи*** называют результат, т.е. ответ на требование задачи;
2. ***решением задачи*** называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результата (например, говорят о решении задачи арифметическим способом) и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод (т.е. в данном случае под решением задачи понимается вся деятельность человека, решающего задачу).

**2. Методы и способы решения текстовых задач**

Основными методами решения текстовых задач являются *арифметический* и *алгебраический.*

Решить задачу ***арифметическим методом*** – ***это значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами.***

Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами. Они отличаются друг от друга логикой рассуждений, выполняемых в процессе решения задачи.

Решим, например, различными арифметическими способами такую задачу: «Сшили 3 платья, расходуя на каждое по 4 м ткани. Сколько кофт можно было сшить из этой ткани, если расходовать на одну кофту 2 м?».

1 способ

1. 4⋅3=12 (м) – столько было ткани.
2. 12:2=6 (кофт) – столько кофт можно сшить из 12 м ткани.

2 способ

1. 4:2 = 2 (раза) – во столько раз больше идет ткани на платье, чем на кофту;
2. 3 ⋅2=6 (кофт) – столько кофт можно сшить.

***Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений.***

Если для одной и той же задачи можно составить различные уравнения (системы уравнений), это означает, что данную задачу можно решить ***различными алгебраическими способами.***

*Например,* задачу о массе шерсти, израсходованной на свитер, шапку и шарф, можно решить тремя различными способами.

1 способ

Обозначим через Х(г) массу шерсти, израсходованной на шапку. Тогда на шарф будет израсходовано (х + 100) г, а на свитер ((х+10)+400) г. Так как на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение х+ (х+100)+((х+100)+400)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=200. Таким образом, на шапку было израсходовано 200 г, на шарф – 300 г, так как 200+100=300, на свитер – 700 г, так как (200+100) + 400=700.

2 способ

Обозначим через х (г) массу шерсти, израсходованной на шарф. Тогда на шапку будет израсходовано (х-100) г, а на свитер – (х+400) г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение: х+ (х – 100)+(х+400)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=300. Таким образом, если на шарф израсходовали 300 г, то на шапку 200 г (300-100=200), а на свитер 700 г (300+400 =700).

3 способ

Обозначим через х(г) массу шерсти, израсходованной на свитер. Тогда на шарф будет израсходовано (х-400) г, а на шапку (х-400-100) г. Поскольку на все три вещи израсходовано 1200 г, то можно составить уравнение: х+(х-400)+(х-500)=1200.

Выполнив преобразования, получим, что х=700. Таким образом, если на свитер израсходовано 700г, то на шарф пошло 300г (700-400=300), а на шапку – 200 г (700-400-100=200).

**3. Этапы решения задачи и приемы их выполнения**

Решение любой задачи – процесс сложной умственной деятельности. Чтобы овладеть им, надо знать основные этапы решения задачи и некоторые приемы их выполнения.

Деятельность по решению задачи арифметическим методом включает следующие этапы:

1. Анализ задачи.
2. Поиск плана решения задачи.
3. Осуществление плана решения задачи.
4. Проверка решения задачи.

В реальном процессе решения задачи названные этапы не имеют четких границ и не всегда выполняются одинаково полно. Все зависит от уровня знаний и умений решающего. Например, если после прочтения задачи вы обнаружите, что она известного вам вида и вы знаете, как ее решать, то, конечно, поиск плана не вычленяется в отдельный этап. Однако полное, логически завершенное решение обязательно содержит все указанные этапы, а знание приемов их выполнения делает процесс решения любой задачи осознанным и целенаправленным, а значит, и более успешным.

**1. Анализ задачи**

Основное назначение этого этапа - понять в целом ситуацию, описаннуюв задаче; выделить условия и требования; назвать известные и искомые объекты, выделить все отношения (зависимости) между ними.

Производя анализ задачи, вычленяя ее условия, мы должны соотносить этот анализ с требованиями задачи. Другими словами, ***анализ задачи всегда направлен на ее требования.***

Известно несколько приемов, которые можно использовать при анализе задачи.

Разобраться в содержании задачи, вычленить условия и требования можно, если задать специальные вопросы и ответить на них.

О чем задача, т.е. о каком процессе (явлении, ситуации) идет речь в задаче, какими величинами характеризуется этот процесс?

Что требуется найти в задаче?

Что обозначают те или иные слова в тексте задачи?

Что в задаче известно о названых величинах?

Что неизвестно?

Что является искомым?

Рассмотрим задачу: «По дороге в одном и том же направлении идут два мальчика. Вначале расстояние между ними было 2 км, но так как скорость идущего впереди мальчика 4 км/ч, а скорость второго 5 км/ч, то второй нагоняет первого. С начала движения и до того, как второй мальчик догонит первого, между ними бегает собака со скоростью 8 км/ч. От идущего позади мальчика она бежит к идущему впереди, добежав, возвращается обратно и так бегает до тех пор, пока мальчики не окажутся рядом. Какое расстояние пробежит за все это время собака?».

Воспользуемся указанным приемом.

1. О чем задача?

* Задача о движении двух мальчиков и собаки. Оно характеризуется для каждого из участников движения скоростью, временем и пройденным расстоянием.

1. Что требуется найти в задаче?

* В задаче требуется найти расстояние, которое пробежит собака за все время от начала движения, пока мальчики не окажутся рядом, т.е. второй не догонит первого.

1. Что в задаче известно о движении каждого из его участников?

- В задаче известно, что: а) мальчики идут в одном направлении; б) до начала движения расстояние между мальчиками было 2 км; в) скорость первого мальчика, идущего впереди, 4 км/ч; г) скорость второго мальчика, идущего позади, 5 км/ч; д) скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч; е) время движения, когда расстояние между мальчиками было 2 км, до момента встречи.

1. Что в задаче неизвестно?

В задаче неизвестно время, за которое второй мальчик догонит первого, т.е. неизвестно время движения всех его участников. Неизвестно также, с какой скоростью происходит сближение мальчиков. И неизвестно расстояние, которое пробежала собака, - это требуется узнать в задаче.

1. Что является искомым: число, значение величины, вид некоторого отношения?

* Искомым является значение величины – расстояния, которое пробежала собака за время от начала движения мальчиков до момента встречи.

Большую помощь в осмыслении задачи оказывает другой прием – ***перефразировка текста задачи.*** Он заключается в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим, сохраняющим все отношения, связи, качественные характеристики, но более явно их выражающим. Это достигается в результате отбрасывания несущественной, излишней информации, замены описания некоторых понятий соответствующими терминами и, наоборот, замены некоторых терминов описанием содержания соответствующих понятий; преобразование текста задачи в форму, удобную для поиска плана решения.

Особенно эффективно использование данного приема в сочетании с разбиением текста на смысловые части.

Результатом перефразировки должно быть выделение основных ситуаций.

Поскольку в задаче, рассмотренной выше, речь идет о движении, ее можно перефразировать следующим образом:

«Скорость одного мальчика 4 км/ч, а скорость догоняющего его второго мальчика 5 км/ч (это первая часть). Расстояние, на которое мальчики сблизились, 2 км (вторая часть). Время движения мальчиков – это время, в течение которого второй мальчик догонит первого, т.е. в течение которого второй мальчик пройдет на 2 км больше, чем первый (третья часть). Скорость, с которой бежит собака, 8 км/ч. Время движения собаки равно времени движения мальчиков до встречи (четвертая часть). Требуется определить расстояние, которое пробежала собака».

Перефразированный текст часто бывает полезно записать в таблице.

Например, рассматриваемую задачу можно записать с помощью таблицы такого вида:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Скорость | Время | Расстояние |
| 1-й мальчик – 4 км/ч  2-й мальчик – 5 км/ч  Собака- 8 км/ч | ?  ? Одинаковое  ? | ?  ? На 2 км больше 1-го мальчика  ? |

Построением схематического чертежа может быть завершен анализ задачи о массе шерсти, израсходованной на шапку, шарф и свитер. Для этого условимся массу шерсти, израсходованной на шапку, изобразить в виде отрезка произвольной длины. Тогда массу шерсти, израсходованной на шарф и свитер, можно изобразить так, как показано на рисунке.

Шапка

? 100 г

Шарф

? 400 г 1200 г

Свитер

?

И таблица, и схематический чертеж являются вспомогательными моделями задачами. Они служат формой фиксации анализа текстовой задачи и являются основным средством поиска плана ее решения.

После построения вспомогательной модели необходимо проверить:

1. все ли объекты задачи и их величины показаны на модели;
2. все ли отношения между ними отражены;
3. все ли числовые данные приведены;
4. есть ли вопрос (требование) и правильно ли он указывает искомое?

**4. Поиск и составление плана решения задачи**

Назначение этого этапа: установить связь между данными и искомыми объектами, наметить последовательность действий.

План решения задачи – это лишь идея решения, его замысел. Может случиться, что найденная идея неверна. Тогда надо вновь возвращаться к анализу задачи и начинать все сначала.

Как искать план решения задачи? Односложного ответа на этот вопрос нет. Поиск плана решения задачи является трудным процессом, который точно не определен. Можно только указать некоторые приемы, которые позволят осуществить этот этап. Одним из наиболее известных приемов поиска плана решения задачи арифметическим способом является ***разбор задачи по тексту или по ее вспомогательной модели.***

Разбор задачи проводится в виде цепочки рассуждений, которая может начинаться ***как от данных задачи, так и от ее вопросов.***

При разборе задачи ***от данных к вопросу*** решающий выделяет в тексте задачи два данных и на основе знания связи между ними (такие знания должны быть получены при анализе задачи) определить, какое неизвестное может быть найдено по этим данным и с помощью какого арифметического действия. Затем, считая это неизвестное данным, решающий выделяет два взаимосвязанных данных, определяет неизвестное, которое может быть найдено по ним и с помощью какого действия и т.д., пока не будет выяснено, какое действие приводит к получению искомого в задаче объекта.

Проведем такой разбор по тексту задачи:

«На поезде, который шел со скоростью 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем проехал. Каков весь путь туриста?»

Рассуждения ведем от данных к вопросу: известно, что 6 ч турист проехал на поезде, который шел со скоростью 56 км/ч; по этим данным можно узнать расстояние, которое проехал турист за 6 ч, - для этого достаточно скорость умножить на время. Зная пройденную часть расстояния и то, что оставшееся расстояние нужно умножить на 4 (увеличить в 4 раза). Зная, сколько километров турист проехал и сколько ему осталось ехать, можем найти весь путь, выполнив сложение найденных отрезков пути. Итак, первым действием будем находить расстояние, которое турист проехал на поезде; вторым действием – расстояние, которое ему осталось проехать; третьим – весь путь.

При разборе задачи ***от вопроса к данным*** нужно обратить внимание на вопрос задачи и установить (на основе информации, полученной при анализе задачи), что достаточно узнать для ответа на этот вопрос. Для чего нужно обратиться к условиям и выяснить, есть ли для этого необходимые данные. Если таких данных нет или есть только одно данное, то установить, что нужно знать, чтобы найти недостающее данное (недостающие данные), и т.д. Потом составляется план решения задачи. Рассуждения при этом проводятся в обратном порядке.

Проведем такой разбор той же задачи о движении туриста, строя цепочку рассуждений от вопроса к данным: «В задаче требуется узнать весь путь туриста. Мы установили, что путь состоит из двух частей. Значит, для выполнения требования задачи достаточно знать, сколько километров турист проехал и сколько километров ему осталось проехать. И то, и другое неизвестно. Чтобы найти пройденный путь, достаточно знать время и скорость, с которой ехал турист. Это в задаче известно. Умножив скорость на время, узнаем путь, который турист проехал. Оставшийся путь можно найти, увеличив пройденный путь в 4 раза (умножив на 4). Итак, вначале можно узнать пройденный путь, затем оставшийся, после чего сложением найти весь путь».

Поиск плана решения задачи может проводиться по вспомогательной модели, выполненной при анализе задачи.

Покажем, как можно осуществить поиск плана решения задачи о массе шерсти, израсходованной на шарф, шапку и свитер, по схематическому чертежу.

По чертежу видно, на сколько больше израсходовано на свитер, чем, например, на шарф; если из всей массы шерсти вычесть 400 г, то мы узнаем, сколько бы всего израсходовали шерсти, если бы на свитер израсходовали столько же, сколько на шарф. Далее, если к этой массе шерсти прибавить 100 г, то мы узнаем, сколько бы всего израсходовали шерсти, если бы на шапку израсходовали столько же, сколько на шарф. Разделив полученное число на 3, найдем массу шерсти, израсходованной на шарф. Вычтя из полученного результата 100 г, а затем, прибавив к нему 400 г, найдем массу шерсти, использованную на шапку и на свитер.

Заметим, что поиск плана решения данной задачи по схематическому чертежу может быть проведен иначе (сделайте это самостоятельно), - в результате мы получим различные арифметические способы ее решения.

**5. Осуществление плана решения задачи**

Назначение данного этапа – найти ответ на требование задачи, выполнив все действия в соответствии с планом.

Для текстовых задач, решаемых арифметическим способом, используются следующие приемы:

* запись по действиям (с пояснением, без пояснения, с вопросами);
* запись в виде выражения.

Приведем примеры различных записей плана решения задачи: «На поезде, скорость которого 56 км/ч, турист проехал 6 ч. После этого ему осталось проехать в 4 раза больше, чем он проехал. Каков весь путь туриста?»

***Запись решения по действиям с пояснением к каждому выполненному действию.***

1. 56⋅6=336 (км) – турист проехал за 6 ч.
2. 336⋅4=1344(км) – осталось проехать туристу.
3. 336+1344=1680(км) – должен был проехать турист.

***Если пояснения даются в устной форме (или совсем не даются), то запись будет следующей:***

1. 56⋅6=336 (км)
2. 336⋅4=1344 (км)
3. 336+1344=1680 (км)

***Запись решения по действиям с вопросами:***

1)Сколько километров проехал турист на поезде?

56⋅6=336(км)

2) Сколько километров осталось проехать туристу?

336⋅4=1344(км)

3) Сколько километров турист должен был проехать?

336+1344=1680(км)

***Запись решения в виде выражения:***

Запись решения в этой форме осуществляется поэтапно. Сначала записываются отдельные шаги в соответствии с планом, затем составляется выражение и находится его значение. Так как обычно это значение записывают, то запись становится числовым равенством, в левой части которого – выражение, составленное по условию задачи, а в правой – его значение, оно – то и позволяет сделать вывод о выполнении требований задачи.

Так, для рассматриваемой задачи эта форма записи имеет вид:

56⋅6 (км) – расстояние, которое проехал турист на поезде за 6ч

56⋅6⋅4(км) – расстояние, которое осталось проехать туристу

56⋅6+56⋅6⋅4 (км) – путь, который должен проехать турист

56⋅6 + 56⋅6⋅4=1680 (км)

***Пояснения к действиям можно не записывать, а давать их в устной форме.***

Тогда запись решения задачи примет вид:

56⋅6 + 56⋅6⋅4=1680 (км)

**6. Проверка решения задачи**

Назначение этого этапа – установить правильность или ошибочность выполненного решения.

Известно несколько приемов, помогающих установить, верно ли решена задача. Рассмотрим основные.

***Установление соответствия между результатом и условиями задачи.***

Для этого найденный результат вводится в текст задачи и на основе рассуждений устанавливается, не возникает ли при этом противоречия. Проверим, используя данный прием, правильность решения задачи о движении туриста.

Мы установили, что турист должен был проехать 1680 км. Пусть теперь этот результат будет одним из данных задачи. Далее, как известно, за 6ч турист проедет 336 км (56⋅6=336) и ему останется проехать 1680 – 336=1344 (км). Согласно условию задачи это расстояние должно быть в 4 раза больше того, которое турист проехал на поезде за 6 ч. Проверим это, разделив 1344 на 336. Действительно, 1344:336=4. Следовательно, если найденный результат подставить в условие задачи, то противоречий с другими данными, а именно отношением «быть больше в 4 раза», не возникает. Значит, задача решена верно.

Заметим, что при использовании данного приема проверяются все отношения, имеющиеся в задаче, и если устанавливается, что противоречия не возникает, то делают вывод о том, что задача решена верно.

***Решение задачи другим способом.***

Пусть при решении задачи каким-то способом получен некоторый результат. Если ее решение другим способом приводит к тому же результату, то можно сделать вывод о том, что задача была решена верно.

Заметим, что если задача решена первоначально арифметическим способом, то правильность ее решения можно проверить, решив задачу алгебраическим методом.

Не следует думать, что без проверки нет решения текстовой задачи. Правильность решения обеспечивается, прежде всего, четкими и логичными рассуждениями на всех других этапах работы над задачей.