**ТЕМА 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ**

*Содержание*

1. Понятие множества и элемента множества.
2. Способы задания множества.
3. Отношения между множествами. Подмножества.
4. Изображение отношений между множествами при помощи кругов Эйлера.

Математика, как и другие науки изучает окружающий нас мир, природные и общественные явления, но изучает лишь их особые стороны. Например, в геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: цвет, массу, твердость. От всего этого отвлекаются, *абстрагируются*. Поэтому в геометрии вместо слова «предмет» говорят: «Геометрическая фигура».

Результатом абстрагирования являются и такие важнейшие математические понятия, как «число» и «величина».

Вообще, любые ***математические объекты* – *это результат выделения из предметов и явлений окружающего мира количественных и пространственных свойств и отношений и абстрагирования их от всех других свойств***. Следовательно, математические объекты реально не существуют, нет в окружающем нас мире геометрических фигур, чисел и т.д. Все они созданы человеческим умом в процессе исторического развития общества и существуют лишь в мышлении человека.

Более того, при образовании математических объектов происходит не только абстрагирование от многих свойств предметов, но и приписывание им таких свойств, которыми никакие реальные предметы не обладают. Например, свойство неограниченной протяженности в обоих направлениях – прямой не обладает ни какой реальный предмет.

Эта лекция будет посвящена одному из таких математических объектов - ***понятию*  *множества*.**

**1. Понятие множества и элемента множества**

Множество – одно из основных понятий современной математики, используемое почти во всех ее разделах.

Во многих вопросах приходится рассматривать некоторую совокупность элементов как единое целое. Так, биолог, изучая животный мир и растительный мир данной области, классифицирует все особи по видам, виды по родам. Каждый вид является некоторой совокупность живых существ, рассматриваемой как единое целое.

Для математического описания таких совокупностей и было введено ***понятие множества.*** По словам одного из создателей теории множеств – немецкого математика Георга Кантора (1845–1918), ***«множество есть многое, мыслимое нами как целое»*.** Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такового определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основе которого строятся остальные понятия математики. Но из этих слов ясно, что можно говорить о множестве чисел от 1 до 10, натуральных числах, множестве треугольников и квадратов на плоскости.

***Понятие множества является одним из основных понятий******математики и поэтому не определяется через другие***. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся некоторого класса, о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве натуральных чисел.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обычной речи, где его связывают с большим количеством предметов. В математике этого не требуется. Здесь рассматривают множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

В основном множества обозначают буквами латинского алфавита: A, B, C, …, Z, L.

*Определение.* ***Множество, не содержащее ни одного объекта, называют пустым и обозначают знаком ∅.***

*Определение.* ***Объекты, из которых образовано множество, называют его элементами.***

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, …, z.

В математике и других науках нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что число 5 натуральное. Другими словами, число 5 принадлежит множеству натуральных чисел. Или, например, число 0,45 не является натуральным числом. Это означает, что число 0,45 не принадлежит множеству натуральных чисел.

Предложение вида “ Объект а принадлежит множеству А” можно записать, используя символы: а∈А. Прочитать его можно по-разному:

Объект а принадлежит множеству А.

Объект а – элемент множества А.

Множество А содержит элемент а.

Предложение “ Объект а не принадлежит множеству А” можно записать так: а ∉ А. Его читают:

Объект а не принадлежит множеству А.

Объект а не является элементом множества А.

Множество А не содержит элемента а.

*Пример*

Пусть А – множество однозначных чисел. Тогда предложение “7∈А” можно прочитать: “Число 7 однозначное”, а запись “ 14∉ А” означает: “Число 14 не является однозначным”.

***Множества бывают конечными и бесконечными****.* Так, множество дней недели конечно, а множество точек прямой бесконечно. Бесконечными множествами являются и такие множества, как множество натуральных чисел (N), множество целых чисел (Z), множество рациональных чисел (Q), множество действительных чисел (R).

**2.Способы задания множества**

Множество можно задать*,* ***перечислив все его элементы.***

Например, множество А состоит из чисел 3, 4, 5 и 6. Поскольку все его элементы окажутся перечисленными, то это множество задано. При этом возможна запись А = {3, 4, 5, 6}, в которой перечисленные элементы заключаются в фигурные скобки.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно, таким образом, и задать конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множеств: указывают *характеристическое свойство его элементов*.

*Определение.* ***Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.***

*Пример*

Множество А – двузначных чисел. Свойство, которым обладает любой элемент данного множества, - “быть двузначным числом”. Это характеристическое свойство дает возможность решить вопрос о том, принадлежит ли какой-либо объект множеству А или не принадлежит. Так, число 21 содержится в множестве А, поскольку оно двузначное, а число 145 множеству А не принадлежит – оно не является двузначным.

Иногда одно и тоже множество можно задать, указав различные характеристические свойства его элементов. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными сторонами и как множество ромбов с прямыми углами.

***Вывод: чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов.*** Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные и бесконечные множества в отличие от первого способа, который, как правило, можно использовать для задания конечных множеств с небольшим количеством элементов. Хотя первый способ используется иногда и для задания бесконечных множеств. Например, множество натуральных чисел может быть задано в виде Ν = {1, 2, 3, …}. Однако такой способ записи возможен лишь тогда, когда по записанной части множества ясно, что означает многоточие.

Одно и тоже множество может быть задано и первым и вторым способом.

*Пример*

Множество В натуральных чисел, меньших 7, заданное посредством указания характеристического свойства его элементов, можно задать и так: В={1,2,3,4, 5, 6}, т.е. перечислив все его элементы.

**3. Отношения между множествами. Подмножество**

Даны два множества:

А = {a, b, c, d, e} и B = {b, d, k, e}. Видим, что элементы b и d принадлежат одновременно множеству А и множеству В. Говорят, что b и d – общие элементы множеств А и В, а сами множества пересекаются.

*Замечание.* ***Если множества не имеют общих элементов, то говорят, что они не пересекаются.***

Рассмотрим теперь множества А = {a, b, c, d, e} и В = {c, d, e}. Они пересекаются, и, кроме того, каждый элемент множества В является элементом множества А. В этом случае говорят, что множество В включено в А или что множество В является подмножеством множества А.

*Определение.* ***Множество В называется подмножеством множества А, если каждый элемент множества В является также элементом множества А.***

Если В – подмножество множества А, то пишут: В ⊂ А – и читают: «В – подмножество А», «В – включается в А».

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества, т. е. ∅ ⊂ А, и что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. А ⊂ А. Поэтому среди всех подмножеств заданного множества А должно быть обязательно пустое множество и само множество А.

##### *Примеры*

Выпишем все подмножества множества А = {2, 3, 4}.

Среди них будут одноэлементные подмножества: {2}, {3}, {4}, двухэлементные: {2, 3}, {3, 4}, {2, 4}, а также само множество А = {2, 3, 4} и ∅. Таким образом, данное множество А имеет 8 подмножеств.

Обратимся теперь к множествам А = {a, b, c, d, e} и В = {c, a, b, e, d}. Они пересекаются, и каждый элемент множества А является элементом множества В, т.е. А ⊂ В, и, наоборот, каждый элемент множества В является элементом множества А, т.е. В ⊂ А. В этом случае говорят, что множества А и В равны.

*Определение.* ***Множества А и В называются равными, если А ⊂ В и В ⊂ А.***

Если множества А и В равны, то пишут: А = В.

**4. Круги Эйлера-Венна**

Из определения вытекает, что равные множества и отношения с множествами удобно иллюстрировать при помощи графических схем, в которых множества представляются в виде кругов, овалов или любых других геометрических фигур и предполагается, что в этих геометрических фигурах заключены все элементы данного множества. Такие геометрические фигуры называются ***кругами Эйлера***, по имени немецкого математика Леонарда Эйлера, который в 1762 году приспособил эту геометрическую фигуру для логических целей.

Например, отношение включения между множествами А = {a, b, c, d, e} и В = {c, e, d} можно изобразить при помощи кругов Эйлера так как на рисунке 1.

Множества А = {a, b, c, d, e} и B = {b, d, k, e} Пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого, поэтому при помощи кругов Эйлера они изображаются так как на рисунке 2. 

Непересекающиеся множества изображают при помощи двух кругов, не имеющих общих точек (Рис. 3).

Установить отношения между множествами – важное умение для учителя. Дело в том, что математика и другие науки изучают не только определенные объекты и явления, но и взаимосвязи, в том числе и отношения между множествами.

Выясним, например, как связаны между собой множества А четных чисел и множество В чисел, кратных 4. В каком из случаев, представленных на рисунках, отношения между данными множествами изображены верно?

Из рисунка 4 следует, что все четные числа делятся на 4, что не верно: можно назвать числа, которые не делятся на 4, например 14. Этот контрпример сразу делает невозможным равенство данных множеств, т.е. случай представленный на следующем рисунке 5.

Следующий рисунок 6 говорит о том, что среди чисел, кратных 4, есть четные, но есть и такие, которые не делятся на 2, что не верно: нетрудно доказать, что любое число, кратное 4, четно.

Следовательно, множество чисел, кратных 4, является подмножеством множества четных чисел. Эта связь изображена на последнем рисунке.

Так же как и понятие множества, понятие подмножества в начальной школе в явном виде не изучается, но задач, связанных с выделением части некоторой совокупности, учащиеся решают много.

*Например*

«Среди данных четырехугольников укажи прямоугольники».

«Назови среди данных чисел четные» и т. д.

**ТЕМА 2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ**

*Содержание*

1. Пересечение множеств.
2. Объединение множеств.
3. Законы пересечения и объединения множеств.
4. Вычитание множеств. Дополнение одного множества до другого.
5. Декартово произведение множеств.

**1. Пересечение множеств**

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества. Считают, что эти новые множества являются результатом ***операций над множествами.***

*Пример*

Пусть даны два множества: А = {2, 4, 6, 8 } и В = {5, 6, 7, 8, 9}.

Образуем множество С, в которое включим общие элементы множеств А и В: С = {6, 8 }. Так, полученное множество С называют *пересечением* множеств А и В.

*Определение.* ***Пересечением множеств А и В называется множество, содержащее только такие элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В.***

Пересечение множеств А и В обозначают А ∩ В. Тогда определение можно представить в символической записи:

**х ∈ Α ∩ Β ⇔ х ∈ Α и х ∈ Β.**

Если изображать множества А и В при помощи кругов Эйлера, то пересечение данных множеств изобразится заштрихованной частью.

В том случае, когда множества *А* и *В* не имеют общих элементов, говорят, что их пересечение пусто и пишут: А ∩ В = ∅.

*Замечание****. Операция, при помощи которой находят пересечение множеств, называется также пересечением***

* ***Нахождение пересечения множеств в конкретных случаях***
* Если элементы множеств А и В перечислены, то, чтобы найти А∩В, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат А и В, т.е. их общие элементы.
* Если множества заданы при помощи характеристических свойств элементов, то характеристическое свойство множества А ∩ В составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

*Пример*

Найдем пересечение множества А – четных натуральных чисел и множества В – двузначных натуральных чисел.

Характеристическое свойство элементов множества А – «быть четным натуральным числом», характеристическое свойство элементов множества В – «быть двузначным натуральным числом». Тогда, согласно определению, элементы пересечения данных множеств должны обладать свойством «быть четным и двузначным натуральным числом». Таким образом, множество А ∩ В состоит из четных двузначных чисел (союз «и» в данном случае можно опустить). Полученное множество не пусто. Например, 24 ∈ А∩В, поскольку число 24 четное и двузначное.

*Пример*

Найти пересечение множества А – четных натуральных чисел и множества В – натуральных чисел, кратных 4. Данные множества А и В бесконечные, и множество В – подмножество множества А. Поэтому элементами, принадлежащими множеству А и множеству В, будут элементы множества В. Следовательно, А ∩ В = В.

**2. Объединение множеств**

Для того, чтобы объяснить школьнику, что 2 + 3 = 5, учитель берет 2 красных кружка и 3 синих. Просит перечислить эти кружки, затем предлагает к красным кружкам придвинуть синие (т.е. объединить эти две совокупности, два множества) и пересчитать все кружки совокупности. Устанавливается, что их 5, т.е. 2 +3 = 5. Таким образом, сложение чисел опирается на *операцию объединения* двух множеств.

В рассмотренном примере объединялись множества, не имеющие общих элементов. В математике приходится выполнять объединение и пересекающихся множеств.

*Определение.* ***Объединением множеств А и В называется множество, содержащее такие элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.***

Объединение множеств А и В обозначают Α ∪ Β. В символической записи: х ∈ Α ∪ Β ⇔ х ∈Α или х ∈ Β.

Если изобразить пересекающиеся множества при помощи кругов Эйлера, то их объединение изобразится заштрихованной областью (рис. 1). Если множества А и В не пересекаются, то их объединение изображают так (рис. 2).



|  |
| --- |
| A |



|  |
| --- |
| **A** |

 Рис 1. Рис. 2.

***Операция, при помощи которой находят объединение множеств, называют также объединением.***

* ***Нахождение объединения в конкретных случаях:***
* Если все элементы множеств А и В перечислены, то, чтобы найти Α∪Β, достаточно перечислить элементы, принадлежащие А или В, т.е. хотя одному из множеств.

*Пример*

Так, если А = {2, 4, 6, 8}, В = {5, 6, 7, 8, 9}, то А ∪ В = {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

* Если множества заданы при помощи характеристических свойств элементов, то характеристическое свойство множества *А ∪ В* составляется из характеристических свойств множеств *А* и *В* с помощью союза «или».

*Пример*

Найти объединение множества А четных чисел и множества В двузначных чисел. Так как свойство элементов множества А – «быть четным числом», а свойство элементов В – «быть двузначным числом», то в объединение данных множеств войдут числа, характеристическое свойство которых - «быть четным или двузначным числом».

*Например*, в А ∪ В есть числа: 8, поскольку оно четное; 17, поскольку оно двузначное; 36, поскольку оно четное и двузначное.

*Пример*



|  |
| --- |
| A |

Найти объединение множеств А – четных натуральных чисел и множества В – натуральных чисел, кратных 4.

Ранее было установлено, что В ⊂ А. Поэтому элементами, принадлежащими множеству А ∪ Β, будут элементы множества А.

Следовательно, в данном случае Α∪Β = А.

**3. Законы пересечения и объединения множеств**

1. *Переместительный (коммутативный) закон пересечения и объединения множеств.*

Из определений пересечения и объединения множеств вытекает:

*Определение****. Для любых множеств А и В справедливо равенство: А ∩ Β = Β ∩ Α и Α ∪ Β = Β ∪ Α.***

1. *Сочетательный (ассоциативный) закон пересечения и объединения множеств.*

### **Определение.** Для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

### ( А ∩ Β ) ∩ С = Α ∩ ( В∩ С), ( Α ∪ Β ) ∪ С = Α ∪ ( Β ∪ С).

Свойство ассоциативности для пересечения и объединения множеств не столь очевидно, как свойство коммутативности, и поэтому нуждается в доказательстве. Но прежде всего можно эти свойства проиллюстрировать при помощи кругов Эйлера. Рассмотрим, например, ассоциативное свойство пересечения множеств. Изобразим множества А, В и С в виде трех попарно пересекающихся кругов. (См. рис.3)

*3. Закон пересечения множеств: ( А ∩ Β ) ∩ С = Α ∩ ( В∩ С)*

В выражении ( А ∩ Β ) ∩ С скобки определяют следующий порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств А и В – оно показано на рисунке вертикальной штриховкой, а затем находят пересечение полученного множества и множества С. Если выделить множество С горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, будет изображать множество ( А ∩ Β ) ∩ С.

Представим теперь наглядно множество Α ∩ ( В ∩ С).(См. рис.4) В соответствии с указанным порядком действий сначала надо найти пересечение множеств В и С – на рисунке оно показано вертикальной штриховкой, а затем выполнить пересечение множества А с полученным множеством. Если отметить множество А горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество Α ∩ ( В∩ С). Видим, что области, представляющие на рисунке множества ( А ∩ Β ) ∩ СиΑ ∩ ( В ∩ С ), одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств. Рис. 4.

Аналогично можно проиллюстрировать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

*Замечание.* ***Важность ассоциативного свойства пересечения и объединения множеств состоит в следующем:***

1. ***можно находить пересечение и объединение трех множеств, зная, как это делается для двух;***
2. ***на основании этого свойства в выражениях ( А ∩ Β ) ∩ С, Α ∩ ( В∩ С),( Α ∪ Β ) ∪ С , Α ∪ ( Β ∪ С) можно опускать скобки и писать А ∩ Β ∩ С или Α ∪ Β ∪ С, что облегчает запись.***

Рассмотрим строгое доказательство свойства ассоциативности одной из операций над множествами, например объединения, т.е. докажем, что для любых множеств А, В и С справедливо равенство ***( Α ∪ Β ) ∪ С = Α ∪ ( Β ∪ С).***

*Доказательство.* Чтобы доказать равенство двух множеств, надо убедится в том, что каждый элемент множества ( Α ∪ Β ) ∪ С содержится в множестве Α ∪ ( Β ∪ С), и наоборот.

1. Пусть х – любой элемент множества ( Α ∪ Β ) ∪ С. Тогда, по определению объединения, х ∈ Α ∪ Β или х∈С.

 Если х ∈ Α ∪ Β, то, по определению объединения, х ∈ А или х ∈ В. В том случае, когда х ∈А, то, также по определению объединения, х ∈ Α ∪ ( Β ∪ С).

 Если х ∈ В, то имеем, что х ∈ Β ∪ С, а значит, х ∈ Α ∪ ( Β ∪ С). Случай, когда х ∈ А и х ∈ В, сводится к рассмотренным. Таким образом, из того, что х ∈ Α ∪ Β, следует, что х ∈ Α ∪ ( Β ∪ С).

Если х ∈ С, то, по определению объединения, х ∈ В ∪ С, и следовательно, х ∈ Α ∪ ( Β ∪ С).

Случай, когда х ∈ Α ∪ Β и х ∈ С, сводится к рассмотренным выше.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества ( Α ∪ Β ) ∪ С содержится и в множестве Α ∪ ( Β ∪ С), т.е. ( Α ∪ Β ) ∪ С ⊂ Α ∪ ( Β ∪ С).

2. Пусть у - любой элемент множества Α ∪ ( Β ∪ С). Тогда, по определению объединения, у∈А или у∈ Β ∪ С.

Если у ∈ А, то, по определению объединения, у ∈Α ∪ ( Β ∪ С).

Если у ∈ Β ∪ С, то у ∈ Β или у∈ С. В том случае, когда у ∈ Β, то у∈ Α∪Β и, значит, у∈ ( Α ∪ Β ) ∪ С. Когда же у ∈ С, то у ∈ ( Α ∪ Β ) ∪ С. Случай, когда у ∈ В и у ∈ С, сводится к уже рассмотренным.

Итак, мы показали, что каждый элемент множества Α ∪ (Β ∪ С) содержится и в множестве (Α ∪ Β) ∪ С, т.е. Α ∪ (Β ∪ С) ⊂ (Α ∪ Β) ∪ С.

Согласно определению равных множеств заключаем, что ( Α ∪ Β ) ∪ С = Α ∪ ( Β ∪ С), что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и ассоциативное свойство пересечения множеств.

*Замечание.* ***Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных, или дистрибутивных, свойствах этих операций. Таких свойств два:***

***1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняется равенство (А ∪ Β ) ∩ С = (А ∩ С) ∪ ( В∩ С).***

***2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняется равенство (А ∩ Β ) ∪ С = (А ∪ С) ∩ ( В ∪ С ).***

*Замечание.* ***Если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.***

**4. Вычитание множеств. Дополнение подмножества**

Чтобы объяснить учащимся, что 5-3=2, часто используют такой прием. Берут 5 предметов, например, 5 кружков. После того как учащиеся убедятся при помощи счета, что кружков действительно 5, им предлагают 3 кружка убрать и сосчитать, сколько кружков осталось. Осталось 2, значит, 5-3=2.

В чем суть приема? Из данного множества, в котором а элементов, удаляют подмножество, содержащее b элементов. Тогда в оставшейся части множества а – b элементов.

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называют ***разностью*** и определяют следующим образом.

*Определение.* ***Разностью множеств А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В.***

Разность множеств А и В обозначают *А \ В.* Тогда, по определению, имеем:

**А \ В ={ х | х ∈ Α и х ∉ Β }.**

Если представить множества А и В при помощи кругов Эйлера, то разность *А \ В* изобразиться заштрихованной областью.

В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность множеств *А \ В* называют ***дополнением множества В до множества А*,** и обозначают символом *ВА.*

При помощи кругов Эйлера данная ситуация представляется на рисунке, где заштрихована та часть, которая осталась после удаления из множества А подмножества В. Эту часть называют *дополнением множества В до множества А.* 

*Определение.* ***Пусть В ⊂ А. Дополнением множества В до множества А называется множество, содержащее только те элементы множества А, которые не принадлежат множеству В.***

 ***ВА ={ х| х ∈ Α и х ∉ Β }.***

Дополнение множества В до множества А ( при условии, что В ⊂ А) обозначают ВА = А \ В.

Операция при помощи которой находят дополнение подмножества, называется ***вычитанием.***

***Нахождение подмножества в конкретных случаях:***

* Если элементы множества *А* и *В* пересечены, то, чтобы найти *А \ В*, достаточно перечислить элементы, принадлежащие *А* и не принадлежащие *В*.

*Пример.* А = {1, 2, 3, 5}, а Β={1, 5}, то А \ В = {2,3}.

* Если указаны характеристические свойства элементов множеств А и В (В⊂А), характеристическое свойство множества А \ В имеет вид «х ∈Α и х ∉Β».

*Пример.* А – множество четных чисел, В – множество чисел, кратных 4. Найти дополнение множества В до множества А. Определить, содержатся ли в этом дополнении числа 20 и 26.

Так как, все числа кратные 4, четные, то В ⊂ А. Если из множества А удалить все числа, кратные 4, то в нем останутся четные числа, не кратные 4. Значит, А \ В – множество четных чисел, не кратных 4. Характеристическое свойство элементов этого множества – «быть четным числом и не кратным 4».

Нетрудно видеть, что 20 ∉ А \ В, поскольку 20 – четное число и кратно 4, а что 26 ∈ А \ В, т.к. 26 – четное число и не кратно 4.

*Пример*. Выясним теперь, из каких чисел состоит множество А \ В ∩ С, если А – множество четных чисел, В – множество чисел, кратных 4, С – множество чисел, кратных 6. 

В записи А \ В ∩ С нет скобок. Возникает вопрос: какое действие выполнять первым? Условились считать, что операция пересечения множеств является более «сильной», чем вычитание.

Пересечением множеств В и С состоит из чисел, кратных 4 и 6. Если удалить это пересечение из множества А, то в нем останутся четные числа, не кратные 4 и 6 (одновременно). При помощи кругов Эйлера данные множества А, В, и С можно изобразить так:

*Замечание.* ***Вычитание – это третья операция над множествами. Условимся считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Поэтому порядок выполнения действий будет такой: сначала находят пересечение множеств, а затем вычитание.***

***Что касается объединения и вычитания множеств, то их считают равноправными.***

*Замечание.* ***Вычитание множеств обладает рядом свойств. В частности, можно доказать, что для любых множеств А, В и С справедливы следующие равенства:***

**(А \ В) \С= (А \ С) \ В (А \ В) ∩ С= (А ∩ С) \ ( В ∩ С )**

 **А \ (В ∪ С ) = (А \ В) ∩ ( А \ С) А \ (В ∩ С) = (А \ В) ∪ ( А \ С)**

**(А ∪ В) \С = (А \ С) ∪(В \ С)**

## Декартово произведение множеств

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то, что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В рассмотренном примере мы имели дело с ***упорядоченными парами****.*

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b, принято записывать, используя круглые скобки: (a; b). Элемент a называют **первой координатой (компонентой) пары**, а элемент b – **второй координатой (компонентой) пары.**

Пары (а; b) и (с; d) равны в том и только том случае, когда а = с и b = d.

В упорядоченной паре (а; в) может быть, что а = в. Так, запись чисел 33 и 55 можно рассматривать как упорядоченные пары (3; 3) и (5; 5).

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств.

*Пример*

Даны множества А={1,2,3}, В={3,5}. Образовать упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству А, а вторая – множеству В.

Перечислив все такие пары, получим множество: {(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3;3), (3;5)}.

Видим, что имея два множества А и В, мы получили новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это множество называют *декартовым произведением множеств А и В.*

*Определение.* ***Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая компонента принадлежит множеству В.***

Декартово произведение множеств А и В обозначают А×Β. Используя это обозначение, определение произведения можно записать так:

**Α×Β={(х; у) | х ∈Α и у ∈ Β}.**

*Пример*

Найти декартово произведение множеств А и В, если:

а) А = {m, p}, Β={e, f, k}; b) A = B={3, 5}.

*Решение.* а) Действуем согласно определению – образуем все пары, первая компонента которых выбирается из А, а вторая – из В: А × Β = {(m; p); (m; f); (m; k); (p; e); (p; f);(p; k)}.

b) Декартово произведение равных множеств находят, образуя всевозможные пары из элементов данного множества: А × А = {(3; 3); (3; 5); (5; 3); (5; 5)}.

## 2. Свойства операции нахождения декартова произведения

1. Так как декартовы произведения А×Β и В×А состоят из различных элементов, то операция нахождения декартова произведения множеств свойством коммутативности не обладает.
2. Аналогично рассуждая, можно доказать, что для этой операции не выполняется и свойство ассоциативности.
3. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

(Α∪Β) × С = (Α × С) ∪ (Β × С), (Α \ Β) × С = (Α × С) \ (Β × С).

*Пример*

Проверьте справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения относительно объединения, если: А = {3; 4; 5}, В = {5; 7}, С = {7; 8}.

*Решение.* Найдем объединение множеств А и В: Α∪Β = {3; 4; 5;7}. Далее перечислим элементы множества (Α∪Β) × С, используя определение декартова произведения: (Α∪Β) × С = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)}.

Чтобы найти элементы множества (Α × С) ∪ (Β × С), перечислим сначала элементы множеств А × С и В × С:

А × С = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8)}

В × С = {(5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)}.

Найдем объединение полученных декартовых произведений:

(Α × С) ∪ (Β × С) = {(3; 7), (3; 8), (4; 7), (4; 8), (5; 7), (5; 8), (7; 7), (7; 8)}.

Видим, что множества (Α∪Β) × С и (Α × С) ∪ (Β × С) состоят из одних и тех же элементов, следовательно, для данных множеств А, В и С справедливо равенство (Α∪Β) × С = (Α × С) ∪ (Β × С).

Выясним теперь, как можно ***наглядно представить декартово произведение множеств.***

* Если множества *А* и *В* конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи таблицы или графа.

*Пример*

Декартово произведение множеств А = {1; 2; 3} и В = {3; 5} можно представить так, как показано на рисунке 1 и 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 3 | 5 |
| 1 | (1,3) | (1,5) |
| 2 | (2,3) | (2,3) |
| 3 | (3,3) | (3,3) |

 Рис. 1

* Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости.

Способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

*Пример*

Изобразите на координатной плоскости декартово произведение Α × В, если:

а) А = {1; 2; 3} и В = [3; 5];

б) А = [1; 3], В = [3; 5];

в) А = R, В = [3; 5];

г) А = R, В = R.

*Решение*

а) Так как множество А состоит из трех элементов, а множество В содержит все действительные числа о т 3 до 5, включая и сами эти числа, то декартово произведение Α × В будет состоять из бесконечного множества пар, первая компонента которых либо 1, либо 2, либо 3, а вторая – любое действительное число из промежутка [3; 5]. Такое множество пар действительных чисел на координатной плоскости изобразится тремя отрезками.

 у

5

3

 1 2 3 х

 б) В этом случае бесконечны оба множества А и В. Поэтому первой координатой может быть любое число из промежутка [1; 3], и, следовательно, точки, изображающие элементы декартова произведения данных множеств А и В, образуют квадрат. Чтобы подчеркнуть, что элементы декартова произведения изображаются и точками, лежащими внутри квадрата, этот квадрат можно заштриховать.

у

5

 3

1 2 х

 в) Этот случай отличается от предыдущих тем, что множество А состоит из всех действительных чисел, т.е. абсцисса точек, изображающих элементы множества Α × В, принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3; 5]. Множество таких точек образует полосу.

 y

5

 3

 *х*

г) Декартово произведение R×R состоит из всевозможных действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение R×R содержит столько же элементов, сколько точек находится на координатной плоскости.