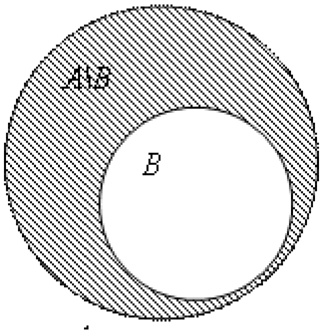
ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ СМЫСЛ РАЗНОСТИ



Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что $n(A)=a$, $n(B)=b$, $B \subset A$, т.е. $a - b = n(AB)$. Это обуславливается тем, что $A=B \cup (AB)$, т.е. $n(A)=n(B) + n(A \setminus B)$.

Докажем это. Так как по условию B – собственное подмножество множества A, то их можно представить так, как на рисунке

Вычитание натуральных (целых неотрицательных) чисел определяется как операция, обратная сложению: $a - b = c$, $b + c = a$.

Разность $A \setminus B$ на этом рисунке заштрихована. Видим, что множества B и A/B не пресекаются и их объединение равно A. Поэтому число элементов в множестве A можно найти по формуле $n(A)=n(B) + n(A \setminus B)$, откуда по определению вычитания как операции, обратной сложению, получаем $n(A \setminus B) = a - b$.

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а также вычитание a из a. Так как $A \varnothing = A$, $A \setminus A = \varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

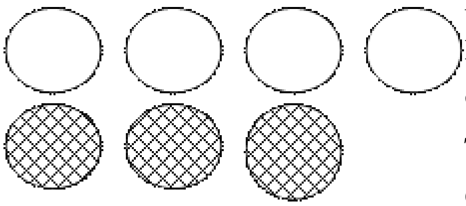
Разность $a - b$ целых неотрицательных чисел существует тогда и только тогда, когда $b \leq a$.

Действие, при помощи которого находят разность $a - b$, называется *вычитанием*, число a – уменьшаемым, b – вычитаемым.

Используя определения, покажем, что $8 - 5 = 3$. Пусть даны два множества такие, что $n(A) = 8$, $n(B) = 5$. И пусть множество B является подмножеством множества A. Например, $A = \{a, s, d, f, g, h, j, k\}$, $B = \{a, s, d, f, g\}$.

Найдем дополнение множества B до множества A: $B'_A = \{h, j, k\}$. Получаем, что $n(B'_A) = 3$.

Следовательно, $8 - 5 = 3$.



Взаимосвязь вычитания чисел и вычитания множеств позволяет обосновать выбор действия при решении текстовых задач. Выясним, почему следующая задача решается при помощи вычитания, и решим ее: «У школы росло 7 деревьев, из них 3 березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?»

Представим условие задачи наглядно, изобразив каждое дерево, посаженное возле школы кружком (рис.). Среди них есть 3 березы – на рисунке выделим их штриховкой. Тогда остальные деревья – не заштрихованные кружки – и есть липы. Т. е. их столько, сколько будет из 7 вычесть 3, т. е. 4.

В задаче рассматриваются три множества: множество A всех деревьев, множество B – берез, которое является подмножеством A, и множество C лип – оно представляет собой дополнение множества B до A. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении.

По условию $n(A) = 7$, $n(B) = 3$ и $B \subset A$. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{a, b, c\}$. Найдем дополнение множества A до B: $B'_A = \{d, e, f, g\}$ и $n(B'_A) = 4$.

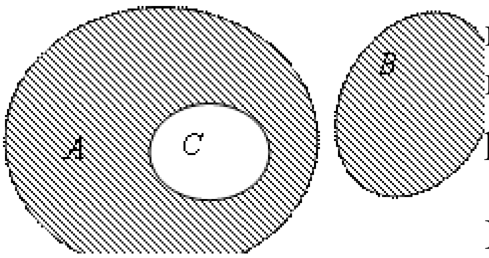
Значит, $n(C) = n(AB) = n(A) - n(B) = 7 – 3 = 4$.

Следовательно, у школы росло 4 липы.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций различные правила.

Правило вычитания числа из суммы: чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного из слагаемых и к полученному результату прибавить другое слагаемое, т.е. при $a \geq c$ имеем, что $(a+b)-c=(a-c)+b$; при $b \geq c$ имеем, что $(a+b)-c=a+(b-c)$; при $a \geq c$ и $b \geq c$ можно использовать любую из данных формул.

Выясним смысл данного правила: Пусть A, B, C – такие множества, что $n(A)=a$, $n(B)=b$ и $A \cap B = \varnothing$, $C \subset A$.



Нетрудно доказать с помощью кругов Эйлера, что для данных множеств имеет место равенство $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$.

Правая часть равенства имеет вид:

$$n((A \cup B) \setminus C = n(A \cup B) - n(C) = (a+b) - c.$$

Левая часть равенства имеет вид: $n((A \setminus C) \cup B = n(A \setminus C) + n(B) = (a-c) + b$

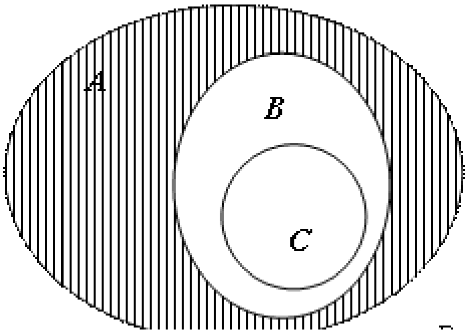
Следовательно $(a + b) – c = (a – c) + b$, при условии, что $a>c$.

Правило вычитания суммы из числа: чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим, т.е. при условии, что $a \geq b + c$, имеем $a – (b + c) = (a – b) – c$.

Выясним смысл данного правила. Для данных множеств имеет место равенство $(A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Тогда получим, что правая часть равенства имеет вид: $n(A \setminus (B \cup C)) = n(A) - n(B \cup C) = a - (b+c)$. Левая часть равенства имеет вид: $n((A \setminus B) \setminus C = n(A \setminus B) - n(C) = (a-b) - c$.

Следовательно $(a + b) – c = (a – c) + b$, при условии, что $a>c$.



Правило вычитания разности из числа: чтобы вычесть из числа *a* разность $b - c$, достаточно к данному числу прибавить вычитаемое *c* и из полученного результата вычесть уменьшаемое *b*; при $a > b$ можно вычесть из числа а уменьшаемое b и к полученному результату прибавить вычитаемое с, т.е. $a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c$.

Выясним смысл данного правила: Пусть *A, B, C* - такие множества, что $n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(C) = c$ и $C \subset B$, $B \subset A$ (рис.). Тогда $a - (b - c)$ есть число элементов множества A-$(B \setminus C)$, а число $(a + c) - b$ есть число элементов множества $(A \cup C) \setminus B$. На рисунке множество A-$(B \setminus C)$ изображено штриховкой. Легко убедиться в том, что множество $(A \cup C) \setminus B$ изобразится точно такой же областью.

Значит, A-$(B \setminus C) = (A \cup C) \setminus B$.

Следовательно, $n(A \setminus (B \setminus C)) = n((A \cup C) \setminus B)$ и $a - (b - c) = (a + c) - b$.

Правило вычитания числа из разности: чтобы из разности двух чисел вычесть третье число, достаточно из уменьшаемого вычесть сумму двух других чисел, т.е. $(a - b) - c = a - (b + c)$.Доказывается аналогично правилу вычитания суммы из числа.

Пример. Какими способами можно найти разность: а) 15 – (5 + 6); б) (12 + 6) – 2?

Решение. а) Используем правило вычитания суммы из числа: 15 – (5 + 6) = (15 – 5) – 6 = 10 – 6 = 4.

Или 15 – (5 + 6) = (15 – 6) – 5 = 9 – 4 = 4.

Или 15 – (5 + 6) = 15 – 11= 4.

б) Используем правило вычитания числа из суммы: $(12 + 6) - 2 = (12 - 2) + 6 = 10 + 6 = 16$.

Или $(12 + 6) - 2 = 12 + (6 - 2) = 12 + 4 = 16$.

Или $(12 + 6) - 2 = 18 - 2 = 16$.

Данные правила позволяют упростить вычисления и широко используются в начальном курсе математики.